Topología

Topología producto, topología cociente y espacios métricos

1. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la familia de subconjuntos

$$\mathcal{B} = \{\{a\} \times (b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R},\ b < c\}.$$

   Demostrar que $\mathcal{B}$ es base de una topología producto en $\mathbb{R}^2$. Estudiar si esta topología es T_2.

2. Demostrar que el producto de dos espacios discretos es discreto y que el producto dos espacios indiscretos es indiscreto.

3. Sean X e Y espacios topológicos y $A \subset X$, $B \subset Y$ dos subconjuntos de X e Y respectivamente. Demostrar que:

   a) $(A \times B)' = (\overline{A} \times B') \cup (A' \times \overline{B})$.

   b) $\mathrm{Fr}(A \times B) = (\overline{A} \times \mathrm{Fr}(B)) \cup (\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B})$.

   Teniendo en cuenta que un toro sólido es un espacio homeomorfo al producto $S^1 \times D^2$, utilizar el apartado b) para demostrar que S^3 es la unión de dos toros sólidos con la frontera común.

4. Considerar el *plano de Sorgenfrey*, es decir, el producto de dos rectas de Sorgenfrey y describir la topología inducida por esta topología en cada una de las rectas que pasa por el origen.

5. Demostrar que un espacio topológico X es T_2 si y solo si el conjunto llamado la *diagonal*

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

   es cerrado en $X \times X$ con la topología producto.

6. Encontrar ejemplos de una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ cuyo grafo

$$\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

   sea cerrado en $X \times Y$ y otra cuyo grafo sí lo sea.

7. Demostrar que si $f : X \longrightarrow Y$ es continua e Y es T_2 entonces el conjunto

$$\{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$$

   es cerrado en $X \times X$.

8. Sean X e Y espacios topológicos y $f, g : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas. Supongamos que Y es T_2.

   a) Demostrar que el conjunto

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

   es cerrado en X.

   b) Demostrar que si $D \subset X$ es denso en X ($\overline{D} = X$) y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$, entonces $f = g$.

9. La *recta proyectiva real* $\mathbb{R}P^1$se define como el espacio cociente de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ por la relación de equivalencia

$$(x, y) \sim (x', y') \quad \text{si existe } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tal que } \quad (x, y) = \lambda(x', y').$$

   Demostrar que $\mathbb{R}P^1$ es homeomorfo a la circunferencia S^1.

10. Sean X un espacio topológico. Se define el *cono* sobre X como el espacio cociente

$$C(X) = (X \times I)/(X \times \{0\}).$$

Demostrar que $C(S^1)$ es homeomorfo al disco unidad cerrado.

11. Sean X e Y dos espacios topológicos disjuntos y sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Se define la *unión por un punto* de X e Y como el cociente

$$X \vee Y = X \sqcup Y/\{x_0, y_0\}.$$

Demostrar que si $\pi : X \sqcup Y \longrightarrow X \vee Y$ es la proyección natural, las restricciones $\pi|_X$ y $\pi|_Y$ son embebimientos.

12. Sea X un espacio topológico y $A \subset B \subset X$ subconjuntos cerrados.

   a) Demostrar que la proyección natural $\pi : X \longrightarrow X/A$ induce un homeomorfismo entre $X \setminus A$ y $(X/A) \setminus \{\pi(A)\}$.

   b) Demostrar que la imagen $\pi(B)$ en X/A es homeomorfa a B/A.

   c) Demostrar que hay un homeomorfismo natural

$$(X/A)/(B/A) \approx X/B.$$

13. Sea A el subespacio de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual dado por

$$A = \{(x, \pm 1) \mid |x| \leq 1\}.$$

Consideremos en A la relación de equivalencia generada por

$$(-1, 1) \sim (-1, 1) \quad \text{y} \quad (1, 1) \sim (1, -1).$$

Demostrar que el espacio cociente es homeomorfo a la circunferencia S^1.

14. En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual se considera la relación de equivalencia

$$(x, y) \sim (x', y') \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2.$$

Demostrar que el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\sim$ es homeomorfo a $[0, +\infty)$ con la topología usual.

15. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ con la topología usual y $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$.

   a) Estudiar si el espacio cociente $X^* = X/A$ es T_2.

   b) Estudiar la continuidad de la aplicación $f : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f([x, y]) = \begin{cases} x & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{si } y > 0. \end{cases}$$

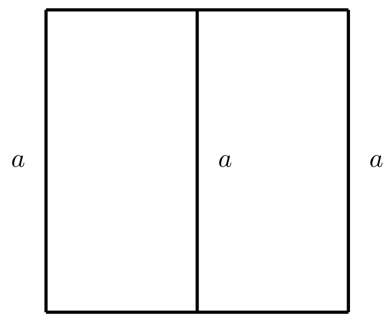
16. Describir los siguientes espacios cocientes de $[0, 5]$:

   a) En $[0, 5]$ se identifican a un punto todos los números enteros.

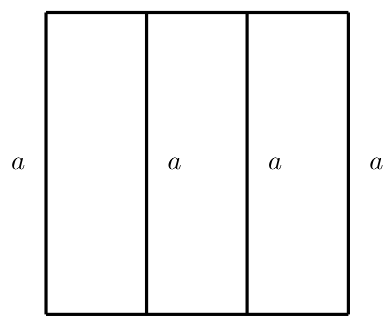
   b) En $[0, 5]$ se identifican a un punto los enteros pares y a otro distinto los enteros impares.

   c) En $[0, 5]$ se identifican a un punto todos los elementos de la sucesión $(5/n)_{n \in \mathbb{N}}$.

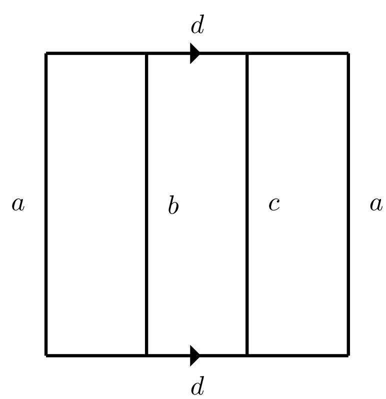
17. Describir el espacio cociente del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ por la relación de equivalencia indicada en la figura. Nótese que todos los puntos etiquetados con la letra a se identifican al mismo punto.



18. Describir el espacio cociente del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ por la relación de equivalencia indicada en la figura. Nótese que todos los puntos etiquetados con la letra a se identifican al mismo punto.



19. Describir el espacio cociente del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ por la relación de equivalencia indicada en la figura. Nótese que todos los puntos etiquetados con la letra a se identifican al mismo punto, los puntos etiquetados con la letra b se identifican a otro punto distinto y los puntos etiquetados con la letra c a un tercer punto distinto de los anteriores. Por otro lado la letra d acompañada de la flecha indica que cada punto de la forma $(x,0)$ se identifica con $(x,1)$.



20. Describir los siguientes espacios cocientes de la esfera S^2:

   a) El cociente de la esfera que se obtiene colapsando todos los puntos del hemisferio sur (incluyendo el ecuador) a un punto.

   b) El cociente de la esfera que se obtiene colapsando el ecuador a un punto.

   c) El cociente de la esfera que se obtiene colapsando todos los puntos de un meridiano a un punto.

   d) El cociente de la esfera que se obtiene colapsando los polos a un único punto.

21. Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$ un subconjunto. Demostrar que $\delta(E) = \delta(\overline{E})$.

22. Probar que las distancias d_1 y d_∞ inducen la misma topología euclídea que d_2 induce en $\mathbb{R}^2$.

23. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Demostrar que las aplicaciones

    a) $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + d'(y_1, y_2)$

    b) $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d(x_1, x_2)^2 + d'(y_1, y_2)^2}$

    c) $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \text{máx}\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}$

    define métricas en $X \times Y$ que inducen la misma topología producto.

24. Demuestra que las aplicaciones $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty : \mathcal{C}^0([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\rho_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

$$\rho_2(f, g) = \left(\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx \right)^2$$

$$\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} \{f(x) - g(x)\}$$

    son distancias en el espacio $\mathcal{C}^0([0,1])$ de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ (pista: para ρ_2 utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz).

25. Dado un espacio métrico (X, d) demuestra que la distancia acotada $\overline{d}(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\}$ induce en X la misma topología que d.

26. Prueba que la recta de Sorgenfrey es normal (pista: imita la demostración de clase de que todo espacio metrizable es normal, y separa dos cerrados A y B de la recta de Sorgenfrey por uniones de intervalos semiabiertos básicos $[a, a + \delta_a/2)$, $a \in A$, $\delta_a = \text{ínf}\{d(a, b) : b \in B\}$).

27. Sea $K = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{B}_u$ una base de la topología usual en $\mathbb{R}$. Recordamos que la familia

$$\mathcal{B}_K = \mathcal{B}_u \cup \{B \setminus K \mid B \in \mathcal{B}_u\}$$

    es base de una de topología en $\mathbb{R}$. Demuestra que este espacio topológico es Hausdorff pero no regular. Para ello prueba que K y $\{0\}$ son dos cerrados disjuntos que no se pueden separar por abiertos disjuntos que los contengan.